

Instrumente zur Analyse von Markt- erwartungen: Risikoneutrale Dichtefunktionen

Einen wichtigen Anknüpfungspunkt für die Beobachtung und Analyse der Erwartungen der Teilnehmer an den Finanzmärkten bieten Preise für derivative Finanzmarktprodukte und darunter insbesondere Optionspreise. Die moderne Finanztheorie hat eine Reihe von Methoden entwickelt, um die darin enthaltenen Informationen über die jeweilige Markteinschätzung herauszufiltern und auf diese Weise transparent zu machen.¹⁾ Der vorliegende Aufsatz präsentiert ein neueres Verfahren, mit dem über eine einfache Punkteinschätzung hinaus die gesamte Streubreite der Markterwartungen beispielsweise hinsichtlich der künftigen Entwicklung des Wechselkurses oder der Zinsen dargestellt werden kann. Anhand aktueller Beispiele wird im Anschluss daran die Anwendbarkeit dieser Methode illustriert. Dabei wird unter anderem auch auf die Veränderungen in den Erwartungen über den US-Dollar/Euro-Wechselkurs im Anschluss an die Terrorangriffe vom 11. September in New York und Washington eingegangen (siehe S. 44 ff.). Im Ergebnis zeigt sich, dass mit Hilfe des Verfahrens wertvolle Zusatzinformationen über das aus den Optionspreisen abgeleitete Marktsextiment gewonnen werden können.

¹ Vgl. dazu auch: Deutsche Bundesbank, Zum Informationsgehalt von Derivaten für die Geld- und Währungspolitik, Monatsbericht, November 1995, S. 17 ff. und Deutsche Bundesbank, Finanzmarktpreise als geldpolitische Indikatoren, Monatsbericht, Juli 1998, S. 51 ff.

Einführung

In praktisch allen verwendeten finanztheoretischen Verfahren wird davon ausgegangen, dass die Preisbildung an den Finanzmärkten als das komplexe Zusammenspiel rational handelnder Marktakteure erklärt werden kann, bei dem es letztlich um die Bewertung finanzieller Forderungen und Verbindlichkeiten geht. Im Rahmen ihrer laufenden Anlage- und Portfolioentscheidungen entwickeln die Marktteilnehmer Vorstellungen über die voraussichtlichen Veränderungen von preisrelevanten Faktoren, so dass die jeweiligen Erwartungen letztlich in den entsprechenden Preisnotierungen enthalten sind. So wird beispielsweise ein Investor, der sich zwischen zwei Anlagen in zwei verschiedenen Währungen entscheiden muss, in seinem Kalkül nicht nur die aktuellen in- und ausländischen Zinsen für den ins Auge gefassten Anlagezeitraum berücksichtigen, sondern auch Überlegungen über den künftigen Wechselkurs anstellen, zu dem er eine eventuelle Fremdwährungsanlage wieder zurück in die heimische Währung tauschen kann. Zur Absicherung des Währungsrisikos stehen ihm an den Termin- und Optionsmärkten verschiedene Instrumente zur Verfügung, deren Preise im Kern eine marktmäßige Bewertung dieses Risikos darstellen. Unter bestimmten Voraussetzungen lassen sich aus den Preisnotierungen dieser Instrumente die darin enthaltenen Informationen zu Dichtefunktionen zusammenfassen. Diese ermöglichen nicht nur Aussagen über den Mittelwert der Erwartungen, sondern darüber hinaus auch über die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Marktakteure mit der Realisation einer Variablen ober- oder

unterhalb bestimmter Referenzwerte rechnen.

Derivative Finanzinstrumente und Indikatoren

Mit derivativen Finanzinstrumenten werden üblicherweise solche Instrumente bezeichnet, deren eigener Preis sich aus der Wertentwicklung eines als Basiswert (hier des US-Dollar/Euro-Wechselkurses) bezeichneten Finanzaktivums ableitet (siehe Erläuterungen auf S. 35).

Begriff

Gemeinsam ist den derivativen Instrumenten ein Kontraktelement, das die Konditionen festschreibt, zu denen in der Zukunft das zu Grunde liegende Geschäft abgewickelt wird. Unterschieden werden derivative Instrumente danach, ob die künftige Transaktion definitiv oder optional ist.

Im ersten Fall handelt es sich um ein Termingeschäft, bei dem beide Vertragsparteien sich verpflichten, das zu Grunde liegende Aktivum (im Beispiel: US-Dollar) am Tag der Fälligkeit des Kontrakts zum vereinbarten Preis zu kaufen beziehungsweise zu verkaufen, so dass je nach der tatsächlichen Kassakursentwicklung bis zum vereinbarten Termin den Verlustrisiken Gewinnchancen spiegelbildlich gegenüberstehen. Der dabei vereinbarte Terminkurs kann unter bestimmten Voraussetzungen als marktmäßiger Erwartungswert für den künftigen Kassakurs interpretiert werden.

*Termin-
geschäfte*

Im zweiten Fall spricht man von einer Kaufoption (Verkaufsoption), wenn der Optionskäu-

Optionen

Erläuterungen zu verschiedenen Optionspreis-Begriffen

Optionen gehören neben den Financial Futures und den Forward Rate Agreements (FRA) zur Familie der derivativen Finanzinstrumente, deren Preis von der Wertentwicklung eines anderen als Basiswert („Underlying“) bezeichneten Finanztitels abhängt. Optionen werden börslich mit standardisierten Kontraktmerkmalen oder außerbörslich „Over-The-Counter“ (OTC) mit maßgeschneiderten Kontraktspezifika gehandelt. Je nach Intention und Risikopräferenz der Marktakteure können Derivate zur Risikoabsicherung (Hedge), zur Arbitrage und zur Risikoübernahme (Spekulation) eingesetzt werden. Die Preise für Optionen (Optionsprämien) werden mit Hilfe von komplexen mathematischen Formeln (Optionspreismodelle) ermittelt, die letztlich aus Absicherungsstrategien und dem Prinzip der Arbitragefreiheit abgeleitet werden.

Kauf-/Verkaufsoption („call“-/„put-option“): Eine Option verbrieft das Recht, nicht aber die Verpflichtung, eine festgelegte Menge eines Basiswerts zu einem vorher festgelegten Preis zu kaufen (Kaufoption) oder zu verkaufen (Verkaufsoption).

Ausübungspreis („strike-price“): Der in der Option festgeschriebene Preis, zu dem der Inhaber der Option von seinem Recht Gebrauch machen kann, die Option auszuüben, das heißt, den Basiswert zu kaufen (verkaufen).

Europäische/amerikanische Option: Bei einer europäischen Option kann der Inhaber der Option nur zum vorher fixierten Verfalldatum ausüben. Im Gegensatz dazu erstreckt sich bei einer amerikanischen Option das Recht zur Ausübung über die gesamte Laufzeit bis zum festgelegten Verfalldatum.

Im Geld („In-the-money“ oder ITM): Eine Kaufoption (Verkaufsoption) ist „im Geld“, wenn der Preis des Basiswerts am Kassamarkt über (unter) dem Ausübungspreis liegt. Bei dieser Preiskonstellation kann der Inhaber einer Kaufoption (Verkaufsoption) den Basiswert vom Schreiber der Option zum Ausübungspreis beziehen (abgeben) und zum aktuellen Kurs am Kassamarkt wieder verkaufen (kaufen) und damit einen Gewinn erzielen.

Aus dem Geld („Out-of-the-money“ oder OTM): Eine Kaufoption (Verkaufsoption) ist „aus dem Geld“, wenn der Preis des Basiswerts am Kassamarkt unter (über) dem Ausübungspreis liegt. Für den Inhaber einer Option ist es nicht lohnend, die Option auszuüben.

Am Geld („At-the-money“ oder ATM): Eine Kaufoption (Verkaufsoption) ist „am Geld“, wenn der Ausübungspreis dem Preis des Basiswerts am Kassamarkt exakt entspricht. Die Ausübung der Option ist für den Inhaber der Option weder mit einem Gewinn noch mit einem Verlust verbunden.

Bei Devisenoptionen, bei denen der Basiswert ein bestimmter Währungsbetrag ist, bezieht sich der ATM-Ausübungspreis häufig nicht auf den zum Zeitpunkt des Ab-

schlusses vorherrschenden Preis des Basiswerts am Kassamarkt, sondern auf den aktuellen Terminkurs der entsprechenden Währung (Am Geld Termin, „At-the-money-forward“).

Zusammengesetzte Optionen

Kauf- und Verkaufsoptionen sind Optionsgrundgeschäfte aus denen sich komplexere Kombinationsstrategien zusammenfügen lassen. Weit verbreitete, zusammengesetzte Deviseninstrumente sind der Risk Reversal und der Strangle.

Risk Reversal: Ein Risk Reversal besteht aus einer „Aus-dem-Geld“-Kaufoption, die erworben wird und einer „Aus-dem-Geld“-Verkaufsoption, die parallel dazu veräußert wird. Beide Optionen verfallen zum gleichen Termin und lauten auf Ausübungspreise, deren prozentualer Abstand vom Terminkurs zum Zeitpunkt der Vertragsausstellung gleich groß ist. Aus dem Marktpreis des Risk Reversals kann abgeleitet werden, ob die Marktteilnehmer Auf- und Abwertungspotenziale des Wechselkurses symmetrisch einschätzen.

Strangle: Ein Strangle besteht aus der Kombination einer „Aus-dem-Geld“-Kaufoption und einer „Aus-dem-Geld“-Verkaufsoption, die sich beide im Besitz des Inhabers befinden. Wie beim Risk Reversal verfallen beide Optionen zum gleichen Termin und lauten auf Ausübungspreise, deren prozentualer Abstand vom Terminkurs zum Zeitpunkt der Vertragsausstellung gleich groß ist. Die Quotierung des Strangles kann als Indikator für – gemessen an der Log-Normalverteilung – extreme Wechselkursbewegungen dienen.

Implizite Volatilität: In Standardoptionspreismodellen kann die Optionsprämie für europäische Optionen in Abhängigkeit vertragsmäßig spezifizierter (Laufzeit und Ausübungspreis) und direkt dem Markt entnehmbarer Größen (Zinsen und Kassakurs des Basiswerts) sowie der nicht direkt beobachtbaren erwarteten Varianz des Basiswerts errechnet werden.

Bei gegebener Parameterkonstellation ist nun der Preis einer Option in Währungseinheiten mit genau einem Volatilitätswert vereinbar, mithin ein eindeutiger Rückschluss von einer Größe auf die andere möglich. Die implizite Volatilität ist dabei diejenige Volatilität, die – unter Zugrundelegung der Standardberechnungsmethode – mit dem beobachteten Marktpreis der Option vereinbar ist. Sie ist ein Maß für die von den Händlern erwartete relative Streubreite des unterliegenden Wertpapiers über die Laufzeit der Option. Die eindeutige gegenseitige Überführbarkeit von Optionsprämie und impliziter Volatilität anhand des Standardoptionspreismodells hat im Spezialfall der außerbörslich gehandelten Devisenoptionen zu der Händlerkonvention geführt, anstatt über Optionsprämien direkt über implizite Volatilitäten zu verhandeln. Im außerbörslichen Handel lauten deshalb Notierungen direkt auf implizite Volatilitätseinheiten, die damit eine bestimmte Optionsprämie implizieren.

fer das Recht (nicht aber die Verpflichtung) erwirbt, zu einem bestimmten künftigen Zeitpunkt den Basiswert (hier: US-Dollar) zu einem vertraglich fixierten Preis vom Optionsverkäufer, dem „Stillhalter“, zu beziehen (an den Optionsverkäufer zu veräußern). Das so vom Stillhalter übernommene einseitige Preisänderungsrisiko wird am Markt mit einer Optionsprämie bewertet, die der Optionskäufer dem Stillhalter entrichtet. Die Höhe der Prämie bestimmt sich ceteris paribus aus der Differenz zwischen dem garantierten Ausübungspreis und der für die Laufzeit der Option erwarteten Marktpreisentwicklung des Basisinstruments, die dem jeweiligen Terminkurs entspricht. Diese Differenz wird auch als innerer Wert der Option bezeichnet. Dabei werden sowohl Kauf- als auch Verkaufsoptionen danach unterschieden, ob die aktuelle Konstellation aus erwartetem Marktpreis und Ausübungspreis am Fälligkeitstag mit einem Gewinn oder einem (natürlich nicht realisierten) Verlust für den Inhaber der Option verbunden wäre. Im ersten Fall wird eine Option als „im Geld“ bezeichnet, andernfalls als „aus dem Geld“. Entspricht der erwartete beziehungsweise zum Zeitpunkt der Fälligkeit der realisierte Kassakurs gerade dem Ausübungskurs spricht man von einer Option, die „am Geld“ ist.

Das hier vorgestellte Verfahren zur Ableitung einer Dichtefunktion über den künftigen Wechselkurs beruht auf Preisen von vier außerbörslich gehandelten derivativen Finanzmarktinstrumenten, deren jeweiliger Informationsgehalt zunächst getrennt dargelegt wird. Dabei handelt es sich um die Quotierungen des Devisenterminkurses, der „Am-

Geld“-Kaufoption, des Risk Reversals und des Strangles (zur Bedeutung der Begriffe und dem Inhalt der entsprechenden Kontrakte siehe auch Erläuterungen auf S. 35). Alle genannten Instrumente des außerbörslichen Verkehrs (des so genannten Over-The-Counter-Markts) sind – im Gegensatz zu den börslichen Kontrakten mit standardisierten Fälligkeitsterminen – jeweils neu abgeschlossene Verträge mit konstanten Vorlaufzeiten (wie beispielsweise einem oder drei Monaten) bis zu ihren jeweiligen Fälligkeits- beziehungsweise Erfüllungsterminen. Neue Kontrakte können grundsätzlich an jedem Handelstag abgeschlossen werden, wobei sich der Erfüllungstermin mit jedem Handelstag jeweils um einen Tag in die Zukunft verschiebt. Der größte Teil der Vorlaufzeiten der außerbörslichen Kontrakte lautet auf ganze Monate bis zu einem Jahr. Längere Vorlaufzeiten können vereinbart werden, sind aber eher unüblich. Für einmal abgeschlossene Kontrakte mit abschmelzender Restlaufzeit existiert kein Markt und liegen somit auch keine Preisquotierungen vor. Die Neutralisation der Position kann allerdings während der Restlaufzeit durch ein Engagement in gegenläufigen Geschäften erfolgen.

Um das Risiko von Wechselkursänderungen für die Dauer einer – auf ausländische Währungseinheiten lautenden – Anlage auszuschießen, stehen seit langem die „klassischen“ Devisentermingeschäfte zur Verfügung. Unter den Bedingungen eines vollkommenen Markts führt das Arbitragegeflecht des internationalen Kapitalverkehrs zu einem Devisenterminkurs, der vollständig durch den aktuellen Kassakurs und die Zinsdifferenz

*Devisen-
terminkurs*

zwischen in- und ausländischen Geldmarktsätzen festgelegt ist. Sind die Anleger risikoneutral, spiegeln sich in dem so determinierten Terminkurs darüber hinaus die Markterwartungen der Akteure bezüglich des zukünftigen Kassakurses wider. Wäre dem nicht so, versuchten Devisenmarkthändler die Diskrepanz zwischen Terminkurs und erwartetem Kassakurs solange durch entsprechende Spekulationsgeschäfte abzuschöpfen, bis der Unterschied gänzlich eingeebnet wäre.

Insofern liegt es nahe, sich den Devisenterminkurs als Indikator für den erwarteten künftigen Wechselkurs nutzbar zu machen. Rückblickend zeigt sich allerdings für die meisten Währungsrelationen eine häufig nur schwache Beziehung zwischen der so gemessenen erwarteten und der später dann tatsächlich realisierten Wechselkursbewegung. Die durchschnittliche tatsächliche Schwankungsbreite der Wechselkursänderungen ist während der Laufzeit eines Kontrakts so weit, dass die durch den Terminkurs auf einen Punkt verdichtete Markterwartung alleine keinen hohen Informationsgehalt aufweist.

Eine Erklärung hierfür mag sein, dass möglicherweise zeitvariable Risikoprämien oder die Möglichkeit von Strukturverschiebungen im Währungsgefüge, die in der rückgerichteten Betrachtung als systematisch aufscheinen, bei der Bestimmung des Terminkurses eine Rolle spielen.

Ein Indikator, der über die Punktprognose des Terminkurses hinaus eine Aussage über die relative Streubreite des künftigen Kassakurses des Basiswerts zulässt, ist die implizite Volatili-

tät, die sich als eingerechneter Bestandteil aus den am Markt beobachtbaren Optionspreisen ableiten lässt. Grundlage hierfür sind die von den Marktteilnehmern verwendeten finanzmathematischen Berechnungsverfahren, mit deren Hilfe ein arbitragefreier Preis für Optionen mit festgelegtem Ausübungszeitpunkt (europäische Optionen) kalkuliert werden kann. Dabei gehen im einfachsten Fall in das Kalkül der Optionsprämie neben ausgehandelten Vertragselementen, wie Laufzeit und Ausübungspreis, sowie unmittelbar am Markt ablesbaren Größen, wie risikolose Zinssätze und der aktuelle Kassakurs des Basiswerts, auch die von den Marktteilnehmern erwartete Preisvolatilität des zu Grunde liegenden Finanztitels mit ein. Somit ist es im Umkehrschluss möglich, unter Verwendung der Optionsprämie sowie der bekannten Variablen, die nicht direkt zugängliche, von den Händlern aber implizit im Optionspreismodell unterstellte Volatilität zu errechnen. Dabei ist zwar die Berechnung der Optionsprämie grundsätzlich vom angewendeten Verfahren abhängig; im Falle der außerbörslich gehandelten Devisenoptionen jedoch besteht unter Händlern die Konvention, an Stelle der entsprechenden Optionspreise beziehungsweise -prämien direkt die impliziten Volatilitäten zu nennen – und damit die geforderten Optionsprämien nur indirekt anzugeben. Bei dieser Quotierungspraxis wird von einem um den Fremdwährungszins erweiterten Black-Scholes-Modell ausgegangen (ohne dass dabei die Gültigkeit dieses Modells vorausgesetzt wer-

den müsste).²⁾ Der so am Markt beobachtbare Erwartungsindikator ist ein Maß für die von den Marktteilnehmern erwarteten symmetrischen prozentualen Schwankungsmargen des künftigen Wechselkurses. Insoweit geben die impliziten Volatilitäten also Aufschlüsse über ein weiteres wichtiges Merkmal der jeweils am Markt herrschenden Erwartungen. Zusätzlich zu der im Terminkurs enthaltenen singulären Information ist die implizite Volatilität ein Maß für die durchschnittliche zukünftige Streubreite. Unberücksichtigt bleiben aber andere wichtige Strukturmerkmale des herrschenden Marktsentiments, wie eine möglicherweise bestehende – auf unterschiedliche Wahrscheinlichkeitszuordnungen zurückgehende – Asymmetrie zwischen einer vermuteten Aufwärts- beziehungsweise Abwärtsbewegung des zu Grunde liegenden Finanzmarktpreises (hier: Aufwertungs- oder Abwertungsrisiko) sowie die Wahrscheinlichkeitseinschätzung von Extrembewegungen des Wechselkurses.

Risk Reversal

Unter Umständen werden nämlich die Wahrscheinlichkeiten einer bestimmten prozentualen Wechselkursbewegung nach oben oder unten als unterschiedlich eingeschätzt. Ein derivatives Finanzinstrument, an dessen Quotierungen eine solche Marktstimmung vom Marktbeobachter abgelesen werden kann, ist der Risk Reversal. Dabei handelt es sich um eine aus den Optionsgrundgeschäften zusammengesetzte Kombinationsstrategie, die sich aus einer erworbenen „Aus-dem-Geld“-Kaufoption und einer parallel dazu veräußerten „Aus-dem-Geld“-Verkaufsoption zusammensetzt. Halten die Marktteilnehmer die Möglichkeit einer prozentualen Wechselkurs-

änderung eines bestimmten Ausmaßes in beide Richtungen für gleich wahrscheinlich, dann heben sich die mit den beiden Positionen eingegangenen Risiken gerade auf, so dass der Preis des Risk Reversals null ist. Veranschlagen hingegen die Akteure auf dem Devisenmarkt das mit der Verkaufsoption eingegangene Verlustrisiko auf Grund einer Wechselkursentwicklung unter den Ausübungspreis höher als das mit der Kaufoption erworbene Gewinnpotenzial auf Grund einer Wechselkursbewegung über den Ausübungspreis, dann ist der Wert des Risk Reversals negativ. Tatsächlich zeigt sich, dass die Notierungen für den Risk Reversal im Zeitverlauf häufig von null verschieden sind, mithin asymmetrische Erwartungen für Wechselkursbewegungen eines bestimmten Ausmaßes in die eine oder die andere Richtung vorliegen.

Wie oben dargelegt ist die einer „Am-Geld“-Kauf- oder Verkaufsoption entnommene implizite Volatilität ein standardisierter Parameter, der im Kontext so genannter log-normalverteilter Preisänderungen die durchschnittlichen Abweichungen des Wechselkurses von seiner mittleren Änderung adäquat beschreibt. Versucht man allerdings bei Finanzmarktdaten, die gesamte relative Streubreite der Preisänderungen allein durch diese Größe wiederzugeben, greift die implizite Volatilität – beispielsweise einer „Am-Geld“-Kaufoption – zu

Strangle

²⁾ Das Grundmodell zur Berechnung von Optionspreisen stammt von Black, F., und M. Scholes (1973), „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“, *Journal of Political Economy*, Bd. 81 (2), S. 637–654, und wurde von Garman, M.B., und S.W. Kohlhagen (1983), „Foreign Currency Option Values“, *Journal of International Money and Finance*, Bd. 2 (6), S. 231–237, für Anwendungen auf dem Devisenmarkt modifiziert.

kurz, da extreme Kursausschläge häufiger in der Realität zu beobachten sind, als gemessen an der Log-Normalverteilung zu vermuten wäre. Dies erkennt man auch daran, dass die implizite Volatilität – entgegen der Annahmen des Standardoptionspreismodells – eine Größe ist, die sich bei sonst gleichen Rahmenbedingungen bei Variationen des Ausübungspreises ändert und mithin kein globales, sondern nur ein lokales, vom Ausübungspreis abhängiges Volatilitätsmaß darstellt. In der Regel wird die implizite Volatilität umso größer, je weiter entfernt der in der Option festgelegte Ausübungspreis vom Terminkurs liegt („Volatilitätslächeln“). Das lässt den Rückschluss zu, dass die Marktteilnehmer eine Schwankungsmarge des Wechselkurses erwarten, die über derjenigen liegt, die mit einer impliziten Volatilität einer „Am-Geld“-Kaufoption zu vereinbaren wäre. Ein Maß für diese von den Marktteilnehmern erwarteten sehr ausgeprägten Wechselkursbewegungen sind die Preisnotierungen der als Strangle bezeichneten Kombination aus gleichzeitig erworbenen Kauf- und Verkaufsoptionen, die beide „aus dem Geld“ sind. Der Besitzer dieses Instruments erhält nämlich nur dann am Verfalltag eine Auszahlung, wenn der Wechselkurs über dem Ausübungspreis der Kaufoption oder unter dem der Verkaufsoption liegt. Da es sich bei den hier betrachteten Optionen um solche handelt, die zum Zeitpunkt des Erwerbs „aus dem Geld“ sind (d.h. im Falle der Kaufoption, dass der Terminkurs unter dem Ausübungspreis liegt), setzt dies eine starke Wechselkursveränderung bis zum Ausübungstermin voraus. Die Zahlungsbereitschaft für den Strangle steigt deshalb mit dem von den Marktakteuren wahrgenomme-

nen Risiko einer außergewöhnlichen Wechselkursentwicklung bis zur Fälligkeit, so dass es sich anbietet, die auf Grundlage der beobachteten impliziten Volatilität vorgenommene Unsicherheitseinschätzung durch die Information zu ergänzen, die den Quotierungen dieses Instruments entnommen werden kann.

Implizite risikoneutrale Dichtefunktionen

Die in den Preisnotierungen der oben vorgestellten derivativen Deviseninstrumente stückweise enthaltene Information kann durch das Berechnen einer impliziten Dichte gebündelt werden, ohne dass dabei auf strukturelle Information wie etwa einen bestimmten Zufallsprozess für die Preisentwicklung des Basiswerts oder ein bestimmtes Optionspreismodell zurückgegriffen werden müsste.³⁾ Dies ist möglich, da unter der Annahme risikoneutraler Anleger der Wert einer Option dem zum risikofreien Zinssatz diskontierten Gegenwartswert der erwarteten Auszahlungen an den Inhaber der Option entspricht. Damit spiegeln sich in einer Optionsprämie implizit die von den Marktteilnehmern unterstellten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Kassakurs des Basiswerts zum Verfalldatum sich über- oder unterhalb des festgelegten Ausübungspreises befinden wird. Liegen zu einem Zeitpunkt mehrere Quotierungen für Optionen mit unterschiedlichen Ausübungspreisen für einen bestimmten Basiswert vor, lässt sich aus den jeweiligen impliziten Einzel-

*Konzept und
Ansatz*

³ Die Berechnungsmethode ist entnommen aus: Malz, A.M. (1997), „Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices“, *The Journal of Derivatives*, Bd. 5 (2), S. 18–36.

wahrscheinlichkeiten eine implizite Dichte annähern, die umso präziser abgeschätzt werden kann, je mehr Optionen mit unterschiedlichen Ausübungspreisen vorliegen. Idealtypisch kann dem Markt zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Kontinuum an unterschiedlichen Optionsprämien entnommen und daraus die implizite Dichtefunktion exakt bestimmt werden.

In der Realität des außerbörslichen Devisenhandels gibt es allerdings nur wenige aktiv gehandelte Kauf- und Verkaufsoptionen mit unterschiedlichen Ausübungspreisen. Der Risk Reversal und der Strangle sind dabei keine unabhängigen, sondern kombinierte Instrumente, die sich aus den Optionsgrundgeschäften zusammensetzen. Um dem idealtypischen Fall einer in Abhängigkeit von unterschiedlichen Ausübungspreisen stetigen Optionspreisnotierung möglichst nahe zu kommen, werden die wenigen tatsächlich beobachteten Marktpreise durch plausible Zwischenwerte aufgefüllt, die dem als „Volatilitätslächeln“ bekannten Phänomen Rechnung tragen. Dabei handelt es sich um die Beobachtung, dass in der Regel die implizite Volatilität bei Optionen, die „im Geld“ beziehungsweise „aus dem Geld“ sind, über der impliziten Volatilität der „Am-Geld“-Option liegt.

Berechnungsverfahren

Aus den so angereicherten Daten wird dann die implizite risikoneutrale Dichte über die erwarteten Änderungen des Basiswerts abgeleitet. Das dabei angewandte Verfahren ist im Einzelnen im Anhang zu diesem Bericht dargestellt. In der danach berechneten Dichtefunktion schlagen sich

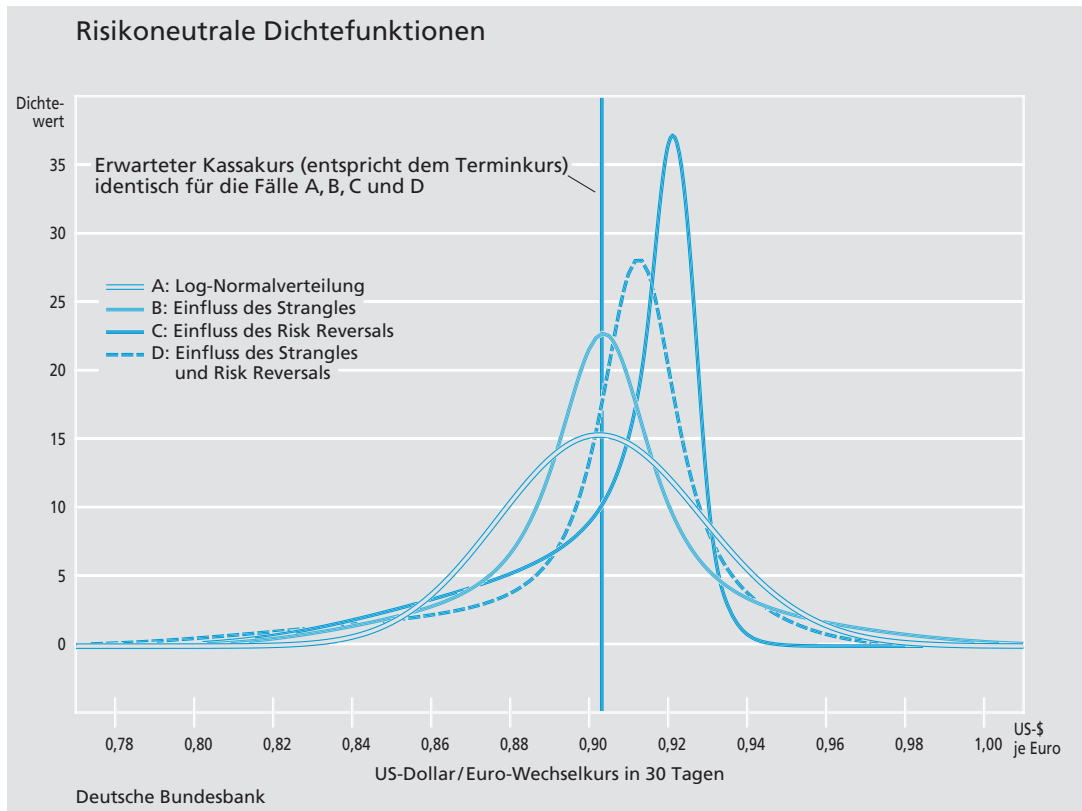
- die Werte für die implizite Volatilität in der „Breite“,
- der Preis des Risk Reversals in der „Schiefe“ und
- die Quotierung des Strangles in den „Auswölbungen“ an den Rändern

nieder. In dem Schaubild auf Seite 41 ist stilisiert dargestellt, wie sich zu einem bestimmten Zeitpunkt unterschiedliche Marktpreiskonstellationen von zeitgleich erfassten „Am-Geld“-Kaufoptionen, Risk Reversals und Strangles in verschiedene Dichten übersetzen, die allerdings nur dann als Dichtefunktionen interpretiert werden können, wenn davon ausgegangen wird, dass die Marktteilnehmer entweder risikoneutral sind – das heißt indifferent bezüglich möglicher Preisrisiken – oder aber Risikoprämien eine nur unbedeutende Rolle spielen.

Alle im Schaubild eingezeichneten Dichten weisen den gleichen Mittelwert auf und beruhen auf der gleichen impliziten Volatilität. Dem durch die Dichtefunktionen implizierten Mittelwert entspricht dabei der jeweils zum Zeitpunkt der Berechnung vorherrschende Terminkurs. Eine höhere implizite Volatilität der „Am-Geld“-Kaufoption schläge sich in einer weiter gespreizten Wahrscheinlichkeitsverteilung nieder, so dass der Abstand zwischen den Randbereichen der Dichte breiter würde.

Die mit A gekennzeichnete risikoneutrale Dichte entspricht dem Referenzfall einer Log-Normalverteilung und gibt eine Situation wie-

Die Log-Normalverteilung ...



der, in der prozentuale Auf- und Abwertungs-
potenziale am Markt symmetrisch einge-
schätzt und – gemessen an der Log-Normal-
verteilung – keine extremen Wechselkursbe-
wegungen erwartet werden.

Die Folgen eines steigenden Preises für den
Strangle sind in der mit B bezeichneten Dich-
tefunktion veranschaulicht. Verglichen mit
der Log-Normalverteilung läuft die Dichte
über dem Mittelwert spitzer zu, während sich
ihre Ränder stärker wölben, so dass extreme
Wechselkursbewegungen in beide Richtun-
gen wahrscheinlicher werden. Die Auswir-
kung einer Preisänderung des Risk Reversals
auf die Kalkulation der risikoneutralen Dichte
lässt sich anhand der mit C bezeichneten im-
pliziten risikoneutralen Dichte erkennen. Bei
einem negativen Risk Reversal „lehnt“ sich

die implizite Dichte nach rechts, so dass ihr
Gipfel rechts von der mittleren Erwartung
liegt und eine US-Dollar-Aufwertung um
einen bestimmten Prozentsatz wahrschein-
licher ist als eine US-Dollar-Abwertung um
den gleichen Prozentsatz. Die mit D gekenn-
zeichnete Dichte schließlich bildet die kombi-
nierten Einflüsse ab, die der Risk Reversal in C
und der Strangle in B auf die Ableitung der
impliziten Wahrscheinlichkeiten ausüben.

Die Darstellung dieser zeitgleich erfassten
Marktnotierungen in Form einer impliziten
Dichtefunktion hat den Vorteil, dass auf
anschauliche Weise komplexe Informationen
aufbereitet werden können. Dabei wird aus
den Daten nicht nur die mittlere Markterwar-
tung, sondern darüber hinaus auch die mögli-
cherweise nicht symmetrische oder – gemes-

*Vorteile der
Darstellung ...*

*... und der
Einfluss des
Strangles und
des Risk
Reversals*

sen an der Log-Normalverteilung – extreme Streuung der Erwartungen um diesen Erwartungswert herausgefiltert. Die Nutzer der impliziten risikoneutralen Dichte sind somit nicht mehr auf die Interpretation einer Punkterwartung angewiesen, sondern haben mit einem Blick das Gesamtbild der Marktmeinungen vor Augen.

... und Ein-
schränkungen

Bei der Bedeutung und Interpretation der risikoneutralen Dichtefunktionen ist jedoch auch Vorsicht geboten. So darf nicht außer Acht gelassen werden, dass die mangelnde Verfügbarkeit von Optionen mit unterschiedlichen Ausübungspreisen und der deswegen notwendige Rückgriff auf ein Interpolationsverfahren eine nicht unerhebliche Einschränkung des Informationswerts des Verfahrens bedeuten. Bei der Auswahl der zur Berechnung heranzuziehenden Optionspreise ist daher zum einen darauf zu achten, dass es sich bei den verwendeten Notierungen tatsächlich um ausreichend liquide und damit repräsentative Quotierungen handelt. Zum anderen wäre es wünschenswert, die Berechnung auf ein möglichst breites Spektrum von Beobachtungen zu stützen. Insbesondere Derivatpreise von weit „aus dem Geld“ beziehungsweise „in dem Geld“ liegenden Optionen – so genannte Flügeloptionen („wing options“) – könnten den Informationswert der berechneten Dichtefunktionen verbessern. Vielfach besteht aber gerade in dieser Hinsicht ein gewisses Dilemma, da gerade die Flügeloptionen, die das Potenzial hätten, die Markterwartungen hinsichtlich möglicher Extremereignisse präziser abzugreifen, entweder gar nicht zur Verfügung stehen, oder hohe Liquiditätsprämien enthalten, welche die Markteinschät-

zung hinsichtlich der künftigen Kursentwicklung verzerren. Im Ergebnis ist man daher häufig darauf angewiesen, bei der Berechnung von Dichtefunktionen nach dem skizzierten Verfahren nur auf Optionsprämien recht nahe „am Geld“ liegender Instrumente zurückzugreifen, die in der Regel vergleichsweise liquide sind, so dass die Verzerrungen von dieser Seite vernachlässigt werden können. Vorsicht ist dann aber bei Interpretationen geboten, die sich auf Wahrscheinlichkeiten jenseits des von den Ausübungspreisen der verwendeten Strangles und Risk Reversals aufgespannten Raums der Dichtefunktion beziehen.

Probleme können auch bei der Berechnung und Interpretation risikoneutraler Dichtefunktionen entstehen, wenn es bei besonderen Marktkonstellationen zu plötzlichen Nachfrageschüben kommt, die sich in kräftigen Ausschlägen bei den Prämien der Grundoptionsarten niederschlagen. So gibt es beispielsweise starke Wechselbeziehungen zwischen Standardinstrumenten und speziellen, auch als „exotisch“ bezeichneten Optionen, die Kursrisiken nur bis zu bestimmten Ober- oder Untergrenzen („Knock-out“-Optionen, „Knock-in“-Optionen) abdecken und ihren Versicherungscharakter in dem Augenblick verlieren, in dem der Kassakurs an die in den Kontrakten festgelegten Barrieren stößt. Liegt eine Vielzahl dieser Schwellenwerte zu einem Zeitpunkt nahe beieinander, weil sie etwa mit bekannten „Widerstandslinien“ des charttechnischen Handels übereinstimmen, entfalten bei einem unerwarteten Überschreiten der Grenzlinie die dem Kursrisiko nun frei exponierten Händler möglicherweise eine so

*Probleme bei
„technischen“
Marktverspan-
nungen ...*

starke Nachfrage nach Kurssicherungsinstrumenten, dass sich dies in einem steilen Anstieg der betreffenden Preise und damit der impliziten Volatilitäten dieser Instrumente äußert. Betroffen sind in einer solchen Situation sowohl die Optionsinhaber der „Knock-out“-Optionen, vor allem aber auch die dazugehörenden Optionsstillhalter, die mit dem Kauf von Standardoptionsverträgen in einer solchen Situation das Verlustpotenzial ihrer im Zusammenhang mit dem Verkauf der „Knock-out“-Optionen eingegangenen Kurssicherungspositionen zu deckeln suchen. Die Aussagekraft der derivativen Finanzmarktpreise und der aus ihnen abgeleiteten Dichtefunktionen ist in Zeiten solcher „technisch“ verursachter Marktverwerfungen eingeschränkt.⁴⁾

...sowie
Risikoprämien

Bei der Interpretation der berechneten risikoneutralen Dichten als reine Wahrscheinlichkeitsmaße gelten im Übrigen die gleichen Einschränkungen, wie sie bei der Auslegung des Terminkurses als Erwartungswert des künftigen Kassakurses zu beachten sind. Wie der Name bereits nahe legt, handelt es sich hier um Dichtefunktionen, die unter der Annahme der Risikoneutralität der Anleger abgeleitet wurden. Es wird also davon abstrahiert, dass Anleger in der Regel für die Übernahme von Risiken eine Prämie verlangen und mithin eher risikoscheu als risikoneutral sind. Nur unter der Annahme der Risikoneutralität der Marktteilnehmer spiegeln sich allerdings in den berechneten Dichten die „reinen“ Wahrscheinlichkeiten über die zukünftige Wechselkursentwicklung wider, ansonsten enthalten sie darüber hinaus eine von den individuellen Risikoeinstellungen beeinflusste Komponen-

te, die nicht getrennt erfasst und isoliert werden kann. In der Praxis scheint die quantitative Bedeutung der Risikoprämien aber eher gering zu sein und möglicherweise nur den Mittelwert nicht aber die Form der Dichte zu beeinflussen, so dass die Verzerrungen, die bei der Berechnung nach der hier beschriebenen Methode in den risikoneutralen Dichten auftreten können, nicht sehr groß sind. Das gilt vor allem, wenn man weniger auf die konkrete Dichtefunktion selbst als auf ihre Veränderungen im Zeitverlauf abstellt.

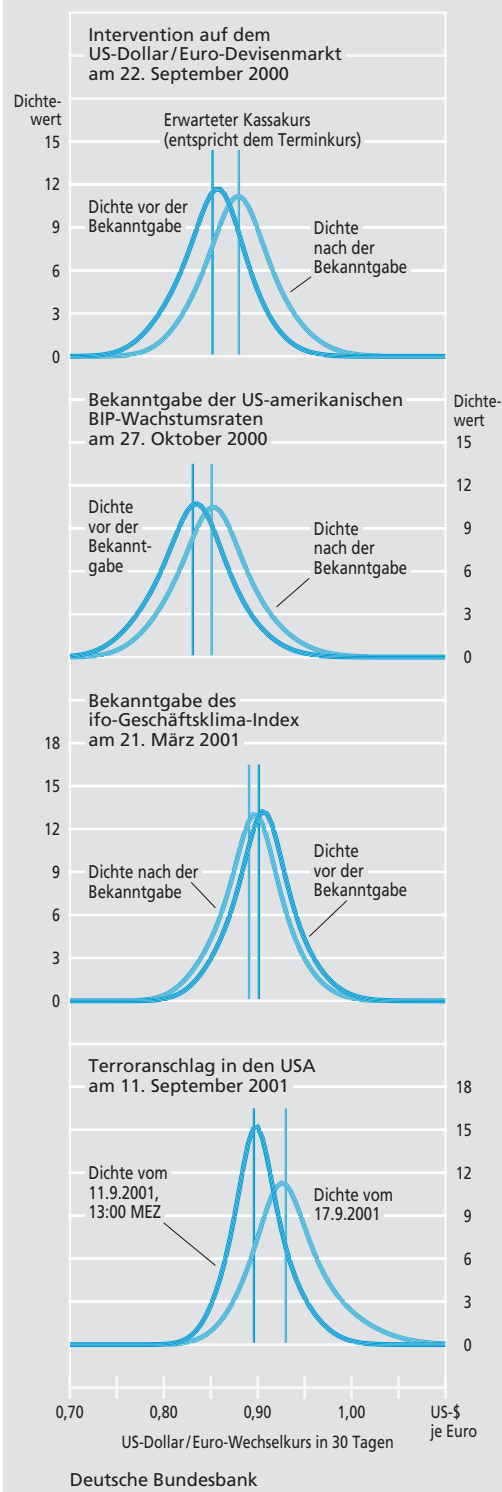
Anwendungsmöglichkeiten

Unter Berücksichtigung dieser Einschränkungen können anhand der impliziten risikoneutralen Dichtefunktionen und ihrer Veränderungen aber zweifellos wichtige Anhaltspunkte über die Entwicklung der Erwartungen und Risikoeinschätzungen der Marktteilnehmer gewonnen werden. Im Folgenden soll dies mit vier ausgewählten Beispielen illustriert werden. Sie betreffen den Einfluss

- der Devisenmarktintervention der Europäischen Zentralbank Ende September vorigen Jahres,
- der überraschend ungünstigen Daten für die US-Konjunktur, die Ende Oktober 2000 bekannt gegeben wurden,

⁴ Eine solche Marktsituation ist beschrieben in: Malz, A. M. (1995), „Currency Option Markets and Exchange Rates. A Case Study of the U.S. Dollar in March 1995“, Current Issues in Economics and Finance, Federal Reserve Bank of New York, Bd. 1 (4).

Risikoneutrale Dichtefunktionen: Anwendungsmöglichkeiten



– der Veröffentlichung des unerwartet stark zurückgegangenen ifo-Geschäftsklima-Index im März 2001, sowie

– die Auswirkungen der Terroranschläge in New York und Washington am 11. September dieses Jahres

auf die Wechselkurerwartungen der Marktteilnehmer.

Der im Hinblick auf die Fundamentalfaktoren übertriebene Kursrückgang des Euro gegenüber dem US-Dollar im Herbst vorigen Jahres und die damit einhergegangenen Risiken für die Preisstabilität veranlassten die Europäische Zentralbank zusammen mit den amerikanischen und japanischen Währungsbehörden am 22. September 2000 zu konzertierten Interventionen zu Gunsten des Euro. Das nebenstehende Schaubild illustriert die risikoneutralen Dichtefunktionen mit einem Erwartungshorizont von einem Monat, die aus den entsprechenden Optionspreisen am Tag vor und einen Tag nach diesen Interventionen berechnet wurden.⁵⁾ Der Vergleich der beiden risikoneutralen Dichten vor und nach der Intervention zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit von Extremereignissen (gemessen durch den Wert des Strangles) durch die Stützungsoperation unberührt blieb, während die Einschätzung der allgemeinen Streubreite des künftigen Wechselkurses der Marktteilnehmer (im Sinne der impliziten Volatilität der „am Geld“ liegenden Kaufoption) leicht zunahm, sowie die

Beispiel: Intervention am 22. September 2000

⁵⁾ Die risikoneutralen Dichten werden auf Grundlage von Geld-Brief-Mittelkursen der relevanten derivativen Finanzmarktpreise berechnet, die die Citibank täglich um 12:00 WEZ bei ihren Londoner Händlern erfragt.

vor dem Devisenmarkteingriff rechtsschiefe Dichte (erfasst durch den negativen Preis des Risk Reversals) sich aufrichtete und einen deutlich nach rechts verschobenen Mittelwert aufwies. Gegenüber der Situation vor dem Eingriff der Notenbanken erwarteten damit die Marktteilnehmer nach der Intervention – bei einer kaum gestiegenen allgemeinen Unsicherheit – einen etwas höher liegenden Wechselkurs des Euro in einem Monat und schätzten das Risiko einer ausgeprägten Euro-Abwertung nicht mehr höher ein als das einer gleich großen Euro-Aufwertung. Voreilige Schlüsse über die Nachhaltigkeit der Wirkungen von Interventionen sollten aus diesem Ergebnis allerdings nicht gezogen werden. Einige Tage später hatten sich die geschilderten Veränderungen in der berechneten Dichte bereits wieder zurückgebildet.

*Beispiel:
Bekanntgabe
von US-Kon-
junkturdaten ...*

Neben der Wirkungsweise der eigenen Instrumente bietet der Erwartungsindikator auch die Möglichkeit, die Einflüsse anderer markt-relevanter Faktoren und Ereignisse auf die Einschätzung der Marktteilnehmer zu untersuchen. So wurden im Oktober 2000 bei sich mehrenden Anzeichen einer sich allmählich abschwächenden US-Konjunktur vorläufige Daten über das amerikanische Wirtschaftswachstum im dritten Quartal 2000 veröffentlicht, das mit nur 2,7 % weit hinter den von Marktanalysten erwarteten 3,5 % zurückgeblieben war. Das Schaubild auf Seite 44 zeigt die Veränderung der impliziten risikoneutralen Dichten unter dem Einfluss dieser Neuigkeit. Am Tag nach der Bekanntgabe lag die mittlere Erwartung über den US-Dollar/Euro-Wechselkurs in einem Monat etwas höher als vor der Veröffentlichung. Gleichzeitig

schätzte der Markt, der zuvor eher mit einer starken Ab- als mit einer gleich ausgeprägten Aufwertung rechnete, nun die Kursrisiken nach beiden Seiten eher symmetrisch ein. Die Maße für die mittleren Schwankungsmargen, sowie für extreme Kursausschläge blieben hingegen unberührt.

Diesseits des Atlantiks ließ sich mit umgekehrten Vorzeichen eine ähnliche Reaktion auf die Bekanntmachung von schlechter als erwarteten Konjunkturdaten beobachten. Im März dieses Jahres veröffentlichte das ifo Institut einen überraschend deutlichen Einbruch des Indikators für das deutsche Geschäftsklima (um 3,1 Indexpunkte, nachdem Analysten zuvor einen Rückgang um 0,5 Punkte prognostiziert hatten). Diese deutliche Eintrübung der konjunkturellen Lagebeurteilung in Deutschland hinterließ auch ihre Spuren in den Markterwartungen über die Wechselkursperspektiven. Konkret zeigten sie sich in einer leicht nach unten verschobenen mittleren Erwartung für den US-Dollarkurs, sowie in einer sich weiter in die Abwertungsrichtung neigenden risikoneutralen Dichte. Darüber hinaus schienen die Marktakteure auch insgesamt unsicherer, da sich die mittlere Streubreite des künftigen Wechselkurses leicht vergrößerte. Lediglich die Auswölbung an den Rändern und damit die Einschätzung hinsichtlich außergewöhnlicher Wechselkursbewegungen blieb nach Bekanntwerden des Indexwerts unverändert.

*... und der
ifo-Befragung
im März 2001*

Tiefe Spuren in den US-Dollar/Euro-Wechselkurs-erwartungen der Marktakteure hat der Terroranschlag in den USA vom 11. September 2001 hinterlassen. In den Wochen vor dem

*Beispiel: Terror-
anschlag in den
USA*

Anschlag hatte der US-Dollar gegenüber dem Euro wieder etwas von dem Boden wettgemacht, den er zuvor mit den sich eintrübenden Wachstumsperspektiven in den USA verloren hatte. In dieses Marktumfeld traf die Nachricht über die Anschläge in New York und Washington. Im Schaubild auf Seite 44 sind die impliziten risikoneutralen Dichtefunktionen eingezeichnet, die aus den Optionspreisen unmittelbar vor und – wegen der geschlossenen US-Finanzmärkte – eine Woche nach dem Anschlag aus den Marktpreisen berechnet wurden. Gegenüber der Einschätzung vor den Angriffen erwarteten die Marktteilnehmer nach den Anschlägen, dass der Kassawechselkurs des Euro in einem Monat höher liegen würde. Gleichzeitig schnellte die allgemeine Risikoeinschätzung nach oben. Rein numerisch lag der Wert der impliziten Volatilität um 30 % über dem Stand von vor der Attacke. Im Schaubild macht sich das in der „geduckteren“, stärker gespreizten Form der Dichte bemerkbar. Auch die Wahrscheinlichkeit von extremen Wechselkursausschlägen erhöhte sich. Dies tritt durch eine deutlichere Auswölbung der Dichte an den Rändern in Erscheinung. Darüber hinaus schätzte der Markt, der schon vor dem Anschlag eher mit einer ausgeprägten Auf- als mit einer gleich großen Abwertung des Euro rechnete, nun das Potenzial für asymmetrische Wechselkursbewegungen noch höher ein. Der Wert des Risk Reversals, der das Ausmaß des Symmetriebruchs bestimmt, verdoppelte sich unter dem Eindruck der Ereignisse. Im Schaubild wird das durch die sich stärker nach links neigende Dichte deutlich.

Gleichzeitig macht dieses Beispiel aber deutlich, dass bei der Interpretation dieses Indika-

tors auch Vorsicht geboten ist. So werden, wie oben erwähnt, Risikoprämien, die bei der Berechnung der Dichten außen vor gelassen werden, möglicherweise in den Tagen nach dem 11. September eine nicht unerhebliche Rolle gespielt haben. Darüber hinaus hatte sich die Liquiditätssituation auf dem OTC-Markt für Devisenoptionen in London auch noch eine Woche nach dem Anschlag nicht normalisiert, was an recht hohen Geld-Brief-Spannen auch für sonst sehr gängige Instrumente abzulesen war, so dass die Markteinschätzungen weniger „punktgenau“ abgegriffen werden konnten als sonst üblich.

Zusammenfassung und Bewertung

Finanzmarktpreise erschließen der Notenbank Informationen über die jeweils aktuellen Zukunftseinschätzungen der Marktteilnehmer. Diese Kenntnisse sind für die praktische Geldpolitik wichtig. Eine mechanische Ausrichtung an den neuen Indikatoren ist allerdings weder sinnvoll noch möglich. Dagegen sprechen die Unsicherheiten bei der Erfassung und Umsetzung der beobachteten Marktpreise in Erwartungsindikatoren, da Finanzmarktdaten zeitweilig institutionellen Sonderfaktoren ausgesetzt sind oder durch Marktverspannungen verzerrt sein können. Es wird deshalb erforderlich sein, die Aussagekraft der vorgestellten risikoneutralen Dichtefunktion weiter zu überprüfen und auf andere Finanzmärkte anzuwenden. Die Erfahrung damit wird eine noch breiter fundierte Würdigung des vorgestellten Instruments zur Beschreibung der Markterwartungen erlauben.

Anhang

Zur Berechnung von impliziten risikoneutralen Dichtefunktionen

Das hier angewendete Verfahren besteht aus drei Schritten:

I. Zunächst werden die in impliziten Volatilitäten ausgedrückten zeitgleich erfassten Preise von OTC-Devisenoptionen mit unterschiedlichen in Delta-Einheiten angegebenen Ausübungspreisen quadratisch interpoliert und dann II. in eine im Ausübungspreis stetige Optionspreisfunktion überführt, aus der III. durch zweimalige – numerische – Ableitung nach dem Ausübungspreis die implizite risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsverteilung hervorgeht.⁶⁾ Als Ausgangspunkt und Grundlage der Darstellung der einzelnen Berechnungsschritte sind im Folgenden zunächst noch einige Erläuterungen zu den Preisnotierungen von Devisenoptionen vorausgeschickt.⁷⁾

OTC-Notierungen

Im außerbörslichen Handel werden Preise für Devisenoptionen in impliziten Volatilitäten ausgedrückt, welche die Händler zur Abwicklung einer Transaktion über die Garman-Kohlhagen-Formel – der um den Fremdwährungszins modifizierten Black-Scholes-Formel – in den als Optionsprämie bezeichneten Preis in Währungseinheiten umrechnen. Die Verwendung der Garman-Kohlhagen-Formel stellt dabei lediglich eine Marktübereinkunft dar, ohne dass die Marktteilnehmer notwendigerweise von der Gültigkeit des dabei zu Grunde liegenden Modells ausgehen. Die Händlerkonvention erhöht die Markttransparenz und vereinfacht die Geschäftsabwicklung, da – im Gegensatz zu einer Notierung in Währungseinheiten – die von Minute

zu Minute sich ändernden Wechselkurse am Kassamarkt nicht zwangsläufig eine Reaktion des Preises in Volatilitätseinheiten nach sich ziehen. Idealtypisch spiegelt sich somit in den so notierten Optionspreisen allein die sich ändernde subjektive Volatilitätseinschätzung der Händler. Die Garman-Kohlhagen-Formel zur Bewertung von Optionen kann man wie folgt schreiben:

$$c(S_t, \tau, X, \sigma, r, r^*) = e^{-r^*\tau} S_t \Phi(d_1) - e^{-r\tau} X \Phi(d_2)$$

mit (1)

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + \left(r - r^* + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}$$

wobei S_t dem Wechselkurs am Kassamarkt zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses der Option, τ der Laufzeit, X dem Ausübungspreis der Option, r dem heimischen und r^* dem Fremdwährungszinssatz entspricht. $\Phi(\cdot)$ steht für die kumulierte Standardnormalverteilung. Der Parameter σ symbolisiert die erwartete Preisschwankungsbreite des der Option unterliegenden Basiswerts über die Laufzeit τ , und $c(\cdot)$ ist die mit dieser erwarteten Volatilität zu vereinbarende Optionsprämie. Da bei Vertragsabschluss die kontraktsspezifischen Elemente S_t , τ , X ,

⁶ Die Berechnungsmethode – auf Grundlage von Notierungen für europäische Optionen – ist entnommen aus: Malz, A.M. (1997), „Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices“, *The Journal of Derivatives*, Bd. 5 (2), S. 18–36.

⁷ Risikoneutrale Dichtefunktionen können auch unter Verwendung von amerikanischen Devisenoptionen berechnet werden. Siehe hierzu das zum Jahresende erscheinende Diskussionspapier von Craig, B., und J. Keller, „The Empirical Performance of Option Based Densities of Foreign Exchange“, Volkswirtschaftliches Forschungszentrum der Deutschen Bundesbank.

r , r^* bekannt sind, impliziert die Optionspreisformel bei gegebener Optionsprämie $c(\cdot)$ genau einen Wert für σ , der die Gleichung (1) löst. Deshalb bezeichnet man die Variable σ auch als implizite Volatilität, obwohl die Bezeichnung im Zusammenhang mit außerbörslich gehandelten Devisenoptionen unter Umständen irreführend sein kann, da in diesem Fall die Händler direkt über σ verhandeln und damit umgekehrt eine Optionsprämie $c(\cdot)$ implizieren.

Auch der Ausübungspreis wird entsprechend der Händlervereinbarung nicht in Währungseinheiten, sondern in so genannten Options-Delta-Einheiten angegeben, die ein Maß für die Sensitivität des Optionspreises bei Änderungen des Preises des Basiswerts, hier des Wechselkurses, sind. Da bei sonst gleichen Rahmenbedingungen das Options-Delta mit steigenden Ausübungspreisen monoton fällt, sind der Ausübungspreis und das Options-Delta eindeutig miteinander verknüpft, so dass sie über die Garman-Kohlhagen-Formel ineinander überführt werden können. Der Vorteil der Angabe des Ausübungspreises in Options-Delta-Einheiten liegt dabei in der Normierung des „Abstands“ des Ausübungspreises vom aktuellen Terminkurs. So weisen Kontrakte mit gleichen Options-Delta-Einheiten immer Terminkurs-Ausübungspreis-Konstellationen auf, bei denen der – bezogen auf den Terminkurs – prozentuale Abstand des Ausübungspreises vom Terminkurs gleich groß ist. Konkret wählen die Vertragsparteien bei „Aus-dem-Geld“-Kaufoptionen („Im-Geld“-Kaufoptionen) die Ausübungspreise meist so, dass sie mit einem Options-Delta von 0,25 (0,75) beziehungsweise etwas weniger häufig von 0,10 (0,90) einhergehen.

Analytisch ergibt sich das Options-Delta einer Kaufoption aus der ersten Ableitung der Options-

preisformel nach dem Kassakurs des unterliegenden Wertpapiers.

$$\delta = e^{-r^* \tau} \Phi(d_1),$$

wobei $\Phi(d_1)$ wiederum dem Wert der an der Stelle d_1 ausgewerteten kumulierten Standardnormalverteilung entspricht.

OTC-Notierungen für zusammengesetzte Strategien

Diese Quotierungskonvention besteht nicht nur für die Optionsgrundgeschäfte (Kauf- und Verkaufsoptionen), sondern auch hinsichtlich verschiedener Kombinationsstrategien, wie dem Risk Reversal und dem Strangle.

Ein Risk Reversal ist eine Kombination aus dem Kauf einer Kaufoption und dem Verkauf einer Verkaufsoption, deren in Delta-Einheiten ausgedrückte Ausübungspreise (hier: $\delta = 0,25$ für die Kaufoption, $\delta = -0,25$ für die Verkaufsoption) gleich weit vom Terminkurs entfernt liegen. Sein Preis entspricht damit der in impliziten Volatilitäten ausgedrückten Differenz zwischen den beiden zu seiner Konstruktion verwendeten Instrumenten (siehe Glossar auf S. 35). Algebraisch ergibt sich die Quotierung für einen Risk Reversal aus:

$$RR_t^{\delta=0,25} = \sigma_t^{\delta=0,25} - \sigma_t^{\delta=0,75},$$

wobei $\sigma_t^{\delta=0,25}$ ($\sigma_t^{\delta=0,75}$), den impliziten Volatilitätspreis einer Kaufoption (Verkaufsoption) mit einem Delta von 0,25 ($-0,25$) darstellt.⁸⁾

⁸ Wegen der Kauf-/Verkaufsoptionsparität entspricht dem Options-Delta der Verkaufsoption von $-0,25$ ein Options-Delta der Kaufoption von ungefähr 0,75. Die negativen Vorzeichen der Options-Deltas der Verkaufsoptionen werden in der „Händlersprache“ weggelassen.

Ein Strangle besteht aus dem gleichzeitigen Kauf (oder Verkauf) einer Kauf- und Verkaufsoption mit dem Betrag nach gleichem Options-Delta (siehe Glossar auf S. 35). Der Preis für dieses kombinierte Instrument wird angegeben in der Abweichung des Durchschnitts der in ihm enthaltenen Kauf- und Verkaufsoptionen vom Preis einer „Am-Geld“-Kaufoption.

Algebraisch entspricht das:

$$ST_t^{\delta=0,25} = 0,5 (\sigma_t^{\delta=0,25} + \sigma_t^{\delta=0,75}) - \sigma_t^{\text{„am Geld“}}$$

wobei $\sigma_t^{\text{„am Geld“}}$ der implizite Volatilitätspreis einer „Am-Geld“-Kaufoption ist.

Durch eine einfache Umformung ist es möglich, aus den Marktpreisen für den Risk Reversal und für den Strangle auf die impliziten Volatilitäten der diesen zusammengesetzten Instrumenten zu Grunde liegenden Kaufoptionen mit einem Delta von 0,25 beziehungsweise 0,75 zurückzuschließen:

$$\sigma_t^{\delta=0,25} = ST_t^{\delta=0,25} + \sigma_t^{\text{„am Geld“}} + 0,5 RR_t^{\delta=0,25}$$

$$\sigma_t^{\delta=0,75} = ST_t^{\delta=0,25} + \sigma_t^{\text{„am Geld“}} - 0,5 RR_t^{\delta=0,25}$$

Neben der Notierung der „Am-Geld“-Kaufoption ($\sigma_t^{\text{„am Geld“}}$) mit einem Delta von circa 0,5 liegen somit zwei weitere in impliziten Volatilitäten ausgedrückte Preise für Optionen mit in Delta-Einheiten angegebenen Ausübungspreisen vor.

Die Berechnung der impliziten risikoneutralen Dichtefunktion

I. Interpolation der Marktpreise

Diese drei in impliziten Volatilitäten ausgedrückten Preise bilden die Grundlage für eine Interpolation, bei der angenommen wird, dass die nicht beobachteten Volatilitätspreise für Optionen mit unterschiedlichen Options-Deltas sichelförmig um die „Am-Geld“-Kaufoption liegen, so dass sie durch eine Parabel angenähert werden können. Diese nicht-lineare Anordnung der impliziten Volatilitätspreise wird auch als „Volatilitätslächeln“ bezeichnet. Algebraisch kann dieses Phänomen durch ein Polynom zweiter Ordnung beschrieben werden:

$$\sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + \alpha_1 \delta + \alpha_2 \delta^2,$$

wobei σ_t^{δ} den impliziten Volatilitätspreis einer Kaufoption mit einem Options-Delta in Höhe von δ wiedergibt. Da diese Gleichung nur die drei Unbekannten α_0 , α_1 , α_2 enthält, kann sie unter Verwendung der drei zeitgleich beobachteten OTC-Notierungen der „Am-Geld“-Kaufoption, des Risk Reversals und des Strangles zu jedem Zeitpunkt eindeutig gelöst werden.

II. Transformation in eine im Ausübungspreis stetige Optionspreisfunktion

Unter Verwendung der Garman-Kohlhagen-Formel in (1) kann jeder δ/σ -Notierung ein informationsäquivalentes Paar aus Ausübungspreis X und Optionsprämie $c(\cdot)$ numerisch zugeordnet werden. Nachfolgend wird gezeigt, dass zweimaliges numerisches Ableiten der Optionsprämien nach dem Ausübungspreis zu der gesuchten impliziten Wahrscheinlichkeitsverteilung führt.

III. Implizite risikoneutrale Dichtefunktion

Die Optionsprämie $c(t, X, T)$ einer europäischen Kaufoption mit dem Ausübungspreis X und einer Laufzeit $\tau = T-t$ zum Zeitpunkt t ergibt sich bei Risikoneutralität der Marktteilnehmer aus dem – mit dem Zins r einer risikolosen Anlage – diskontierten Erwartungswert der Zahlungsströme der Option am Fälligkeitstag T . Da eine Kaufoption nur bei günstigem Kursverlauf ausgeübt wird, also nur dann, wenn der Wechselkurs S_T über dem Ausübungspreis X sein sollte, liegt der Wert der Option zwischen null und der Differenz zwischen dem Wechselkurs S_T und dem Ausübungspreis X am Tag der Fälligkeit. Algebraisch kann das ausgedrückt werden durch:

$$\begin{aligned} c(t, X, T) &= e^{-r\tau} E[\max(S_T - X, 0)] \\ &= e^{-r\tau} \int_X^{\infty} (S_T - X) \pi(S_T) d(S_T), \quad (2) \end{aligned}$$

wobei $\pi(S_T)$ der von den Händlern zum Zeitpunkt der Transaktion unterstellten Dichtefunktion über die Menge möglicher Realisationen von S_T entspricht. Dies bedeutet, dass sich in den beobachteten Optionspreisen $c(\cdot)$ implizit Informationen über die von den Händlern unterstellte Dichtefunktion widerspiegeln. Der Informationsgehalt ist dabei umso größer, je mehr unabhängige Optionsprämien für Optionen mit unterschiedlichen Ausübungspreisen dem Markt entnommen werden können. Im Idealfall liegt eine stetige Funktion vor. In diesem Fall ist es möglich durch zweimaliges Ableiten von (2) nach dem Ausübungspreis X , die unterstellte Dichtefunktion herauszulösen. Beim einmaligen Ableiten der Optionspreisfunktion erhält man die Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(t, X, T)}{\partial X} &= -e^{-r\tau} \int_X^{\infty} \pi(S_T) d(S_T) \\ &= -e^{-r\tau} [1 - \Pi(X)] \\ &= -e^{-r\tau} P(S_T > X), \end{aligned}$$

wobei $\Pi(S_T)$ der Verteilungsfunktion über die Menge möglicher Realisationen von S_T entspricht und $P(S_T > X)$ die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, dass der Wechselkurs am Fälligkeitstag den Ausübungspreis X überschreiten wird. Wird die erste Ableitung an zwei unterschiedlichen Stellen X_1 und X_2 ausgewertet, kann aus der Differenz zwischen $P(X_1)$ und $P(X_2)$ (mit $P(X_1) > P(X_2)$) die von den Marktteilnehmern unterstellte Wahrscheinlichkeit dafür errechnet werden, dass S_T zwischen X_1 und X_2 liegen wird. Für infinitesimal kleine Variationen des Ausübungspreises kann diese Wahrscheinlichkeit durch die erneute Ableitung der Optionspreisfunktion nach dem Ausübungspreis gewonnen werden:

$$\frac{\partial^2 c(t, X, T)}{\partial X^2} = e^{-r\tau} \pi(X). \quad (3)$$

Die zweite Ableitung der Optionspreisfunktion entspricht somit dem (diskontierten) Wert der Dichtefunktion über die Menge der Realisation von S_T , ausgewertet an der Stelle des Ausübungspreises X .

Wie oben erwähnt ergibt sich bei der konkreten Umsetzung dieses Ansatzes zur Ermittlung der impliziten risikoneutralen Dichtefunktionen das Problem, dass weder eine einheitliche analytische Optionspreisformel, noch eine große Anzahl an Marktpreisen für Optionen mit unterschiedlichen Ausübungspreisen vorliegt. Durch die in I. vorgenommene Interpolation und in II. schrittweise durchgeführte numerische Transformation wird nun ein kontinuierliches Spektrum an Optionsprämien $c(t, X, T)$ zu unterschiedlichen Ausübungspreisen X

geschaffen, aus dem durch Bildung des Differenzenquotienten der Differenzialquotient in (3) für im Prinzip beliebig kleine Abstände angenähert wird. Die numerisch ermittelte Verteilungsfunktion $\hat{\Pi}(X)$ ergibt sich damit aus:

$$\hat{\Pi}(X) = 1 + e^{r\tau} \left[\frac{c(t, X, T) - c(t, X - \Delta X, T)}{\Delta X} \right]$$

wobei $\frac{c(t, X, T) - c(t, X - \Delta X, T)}{\Delta X}$ dem Differenzenquotienten erster Ordnung der numerisch vorliegenden Optionspreisfunktion und ΔX der (beliebig klein wählbaren) Schrittlänge bei der diskreten Differenzenbildung entspricht. Hieraus ergibt sich die gesuchte implizite risikoneutrale Wahrscheinlichkeits-

verteilung $\hat{\pi}(X)$ durch den Differenzenquotienten erster Ordnung der Verteilungsfunktion $\hat{\Pi}(X)$:

$$\hat{\pi}(X) = \frac{\hat{\Pi}(X) - \hat{\Pi}(X - \Delta X)}{\Delta X}$$

Bei der Interpretation der so gewonnenen impliziten Wahrscheinlichkeiten muss man sich allerdings vor Augen halten, dass Aussagen über die Wahrscheinlichkeitsmasse zwischen und jenseits der durch die Ausübungspreise gehandelter Optionen abgesteckten Bereiche maßgeblich auf das Interpolationsverfahren zurückgehen. Dies gilt insbesondere auch für die beiden Enden der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

