

## Schätzung von Zinsstrukturkurven

Bei der Kommentierung der Kapitalmarktzinsen für unterschiedliche Laufzeiten wird die Bundesbank in Zukunft auf (geschätzte) Zinsstrukturkurven zurückgreifen. Sie ersetzen die bisherige näherungsweise Darstellung in Form von (geschätzten) Renditenstrukturkurven. Zinsstrukturkurven erlauben im Prinzip eine präzisere Darstellung und Analyse der Erwartungen am Rentenmarkt und gewährleisten eine bessere internationale Vergleichbarkeit der Schätzergebnisse. Darüber hinaus können aus der Struktur der Kassazinssätze unmittelbar (implizite) Terminzinssätze errechnet werden. Im folgenden wird das Verfahren zur Schätzung der Zinsstruktur vorgestellt.

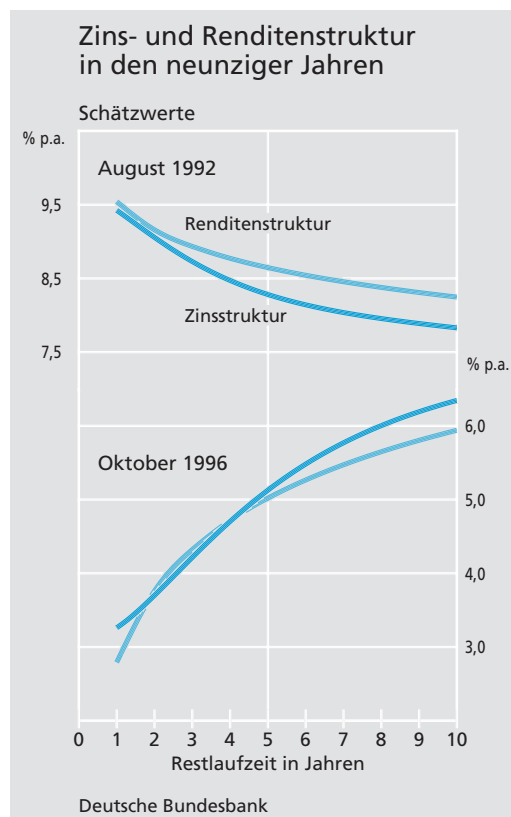
Die Zinsstruktur zeigt den Zusammenhang zwischen den Zinssätzen und Laufzeiten von Nullkuponanleihen ohne Kreditausfallrisiko. Von geldpolitischem Interesse ist sie in erster Linie als Indikator für die am Markt vorherrschenden Zins- und Inflationserwartungen. Ihre Steigung kann Auskunft geben über die erwarteten Veränderungen der Zinssätze oder der Inflationsraten. In den Veröffentlichungen der Deutschen Bundesbank wurde sie bislang näherungsweise durch eine (geschätzte) Renditenstrukturkurve abgebildet. An die Stelle dieses Ansatzes tritt künftig eine

*Zinsstruktur  
und Renditen-  
struktur*

direkte Schätzung der Zinsstruktur.<sup>1)</sup> Diese Darstellung setzt sich mittlerweile international mehr und mehr durch. Sie erlaubt im Prinzip eine präzisere Darstellung und Analyse der Erwartungen und gewährleistet eine bessere internationale Vergleichbarkeit der Schätzergebnisse. Darüber hinaus können aus der Struktur der (Kassa-)Zinssätze unmittelbar (implizite) Terminzinssätze berechnet werden. Letztere enthalten zwar dieselben Informationen wie die Zinsstruktur, doch erlauben sie prinzipiell eine bessere Trennung der Erwartungen über die kurze, mittlere und lange Frist. Im folgenden wird das Verfahren zur Schätzung der Zinsstruktur vorgestellt.<sup>2)</sup>

*Konzeptionelle  
Unterschiede  
zwischen Zinssätzen und  
Renditen*

Die Verzinsung einer Kapitalmarktanlage entspricht der (jährlichen) Ertragsrate, die sich aus dem Verhältnis zwischen Rückzahlungswert und aktuellem Kurs ergibt. Eine Zinsberechnung ist einfach, wenn mit einer Schuldverschreibung – wie im Fall von Nullkuponanleihen – nur eine Zahlung verbunden ist. Sobald aber während der Laufzeit mehrere Zahlungen anfallen, wie bei den in Deutschland üblichen Kuponanleihen, kann die Verzinsung der einzelnen Zahlungen – je nach Zahlungszeitpunkt – differieren. Während bei der Renditenberechnung sämtliche Zahlungsströme mit derselben Rate – der Rendite – auf Gegenwartswerte abdiskontiert werden, wird im Rahmen der Zinsstrukturschätzung jeder Zahlungsstrom mit dem Zinssatz abdiskontiert, der – abhängig von Wiederanlagetermin und -frist – nach den gegenwärtigen Marktverhältnissen zu erwarten ist. Bei Kuponanleihen sind Zinsen und Renditen somit nur dann identisch, wenn für sämtliche Laufzeiten ein konstanter Diskontierungssatz gilt,



also eine horizontale Zinsstruktur vorliegt. In diesem Fall stellt die der Berechnung von Renditen zugrundeliegende Wiederanlageprämisse keine einschränkende Annahme dar. Steigen dagegen beispielsweise die Zinsen mit zunehmender Laufzeit, so wird dieser Anstieg durch die Renditenstruktur unterschätzt. Dies bedeutet, daß die Renditen-

1 Die bislang im Statistischen Beiheft zum Monatsbericht 2, Kapitalmarktstatistik, in der Tabelle II.7e veröffentlichten Ergebnisse der Renditenstrukturschätzung werden ab Oktober 1997 durch die Resultate der Zinsstrukturschätzung ersetzt. Die Renditenstrukturschätzungen werden Interessenten auf Anfrage auch künftig zur Verfügung gestellt. Für das von der Bundesbank verwendete Verfahren zur Schätzung einer Renditenstruktur siehe: Deutsche Bundesbank, Zinsentwicklung und Zinsstruktur seit Anfang der achtziger Jahre; Anhang, Zur Interpretation der Renditenstrukturkurve, Monatsbericht, Juli 1991, S. 40–42.

2 Für eine detaillierte Beschreibung vgl.: Schich, S.T., Schätzung der deutschen Zinsstrukturkurve, Diskussionspapier 4/97, Volkswirtschaftliche Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank, Oktober 1997.

strukturkurve unterhalb der Zinsstrukturkurve liegt, wenn letztere einen ansteigenden Verlauf aufweist. Umgekehrt ist es bei einem fallenden Verlauf der Renditenstrukturkurve (vgl. Schaubild S. 62). Dies kann die Analyse und Interpretation von Renditenstrukturkurven für geldpolitische Zwecke erschweren. Mit einer Zinsstrukturkurve werden diese Probleme vermieden.

*Schätzung einer kontinuierlichen Zinsstrukturkurve ...*

Eine kontinuierliche Zinsstrukturkurve wäre dann am Rentenmarkt direkt beobachtbar, wenn für jede Fristigkeit die Notierung einer (kreditausfall-) risikofreien Nullkuponanleihe vorhanden wäre. Tatsächlich gibt es aber nur eine geringe Zahl solcher Anleihen und damit auch von Beobachtungspunkten. Zwar weisen die Anleihen des Bundes ein vernachlässigbar geringes Kreditausfallrisiko auf und kommen damit dem Ideal (kreditausfall-) risikofreier Anleihen sehr nahe. Doch handelt es sich bei diesen Anleihen überwiegend um Kuponanleihen.<sup>3)</sup>

*... aus Kuponanleihen*

Aus den Kursen von Nullkuponanleihen lassen sich relativ einfach die Zinssätze für die entsprechenden Laufzeiten ermitteln, da diese jeweils die einzigen Unbekannten in den Bewertungsgleichungen der Anleihen darstellen. Im Fall einer Kuponanleihe ist dies (sofern die Restlaufzeit mehr als ein Jahr beträgt) nicht möglich, da zu unterschiedlichen Zeitpunkten Zahlungen anfallen. Um Zinssätze ermitteln zu können, müssen diese einzelnen Zahlungen nicht mit konstanten, sondern – wie erwähnt – mit laufzeitenspezifischen Zinssätzen abdiskontiert werden. Die Bestimmungsgleichung des Kurses der Kuponanleihe enthält also mehrere Unbekannte,

weshalb die Zinssätze iterativ ermittelt werden müssen. Dazu werden aus einer vorgegebenen Zinsstrukturkurve theoretische Renditen errechnet und den beobachteten Umlaufrenditen gegenübergestellt. Die (theoretische) Zinsstruktur wird nun solange variiert, bis die theoretischen Renditen (weitgehend) identisch mit den tatsächlich beobachteten Umlaufrenditen sind.

Für die Schätzung kontinuierlicher Zinsstrukturkurven aus den Renditen von Kuponpapieren muß, ebenso wie im Fall der Schätzung von kontinuierlichen Renditenstrukturkurven, eine Annahme über den funktionalen Zusammenhang zwischen Zinssätzen und Laufzeiten getroffen werden. Diese Entscheidung wird bestimmt vom Verwendungszweck der Schätzungen. Grundsätzlich muß dabei abgewogen werden zwischen der „Glätte“ der geschätzten Kurve auf der einen Seite und ihrer Flexibilität, das heißt der möglichst genauen Beschreibung der beobachteten Daten, auf der anderen Seite. Für die geldpolitische Analyse stellt der von Nelson und Siegel entwickelte und von Svensson erweiterte Ansatz eine gute Kompromißlösung dar.<sup>4)</sup> Hierbei wird der Zinssatz als die Summe aus einer Konstanten und verschiedenen Exponential-

*Schätzansatz*

---

<sup>3</sup> Zwar sind seit Juli dieses Jahres die Trennung und der separate Handel von Kapital- und Zinsansprüchen bei ausgewählten Bundesanleihen möglich (sogenanntes Stripping). Durch das Stripping entsteht prinzipiell eine Vielzahl von zusätzlichen Papieren, die den Charakter von Nullkuponanleihen haben. Doch ist die Liquidität dieser Titel und damit oft auch die Aussagekraft ihrer Kurse im Vergleich zu den traditionellen Kuponanleihen zumindest zum derzeitigen Zeitpunkt noch als eher gering einzuschätzen.

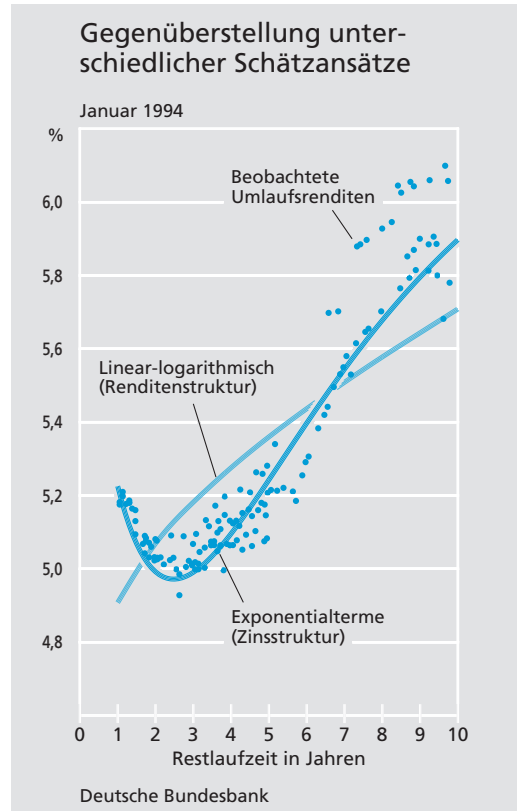
<sup>4</sup> Nelson, C.R. und A.F. Siegel (1987), Parsimonious modeling of yield curves, *Journal of Business*, 60, 4, S. 473 – 489 und Svensson, L.E.O. (1994), Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992 – 94, IWF Working Paper 114, September.

termen (in denen die Restlaufzeit mit negativem Vorzeichen im Exponenten auftritt) sowie als Funktion von insgesamt sechs Parametern definiert:

$$z(T, \beta) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - \exp(-T/\tau_1)}{T/\tau_1} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - \exp(-T/\tau_1)}{T/\tau_1} - \exp\left(-\frac{T}{\tau_1}\right) \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - \exp(-T/\tau_2)}{T/\tau_2} - \exp\left(-\frac{T}{\tau_2}\right) \right).$$

Hier bezeichnen  $z(T, \beta)$  den Zinssatz für Laufzeit  $T$  als Funktion des Parametervektors  $\beta$  und die Variablen  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1$  und  $\tau_2$  die zu schätzenden Parameter dieses Vektors. Die ursprünglich von Nelson und Siegel vorgeschlagene funktionale Form enthält nicht den letzten Term;  $\beta_3$  ist also auf Null restringiert. Die Erweiterung dieses Ansatzes durch Svensson erlaubt einen zusätzlichen Wendepunkt der geschätzten Kurve.

Eigene Testrechnungen mit Daten für den deutschen Rentenmarkt haben gezeigt, daß die Spezifikation gemäß Svensson gegenüber dem Ansatz von Nelson und Siegel in einigen Fällen günstigere Schätzstatistiken liefert. Allerdings kann in anderen Situationen die Svensson-Spezifikation überparametrisiert sein. In diesen Fällen ist die restringierte Form gemäß Nelson und Siegel ausreichend; auf die Schätzergebnisse hat dies allerdings kaum Auswirkungen. Daher wird in den Bundesbank-Publikationen auf die Spezifikation gemäß Svensson zurückgegriffen, zumal dies eine bessere internationale Vergleichbarkeit der Ergebnisse gewährleistet.



Der parametrische Ansatz mit Exponentialtermen ist – sowohl in seiner ursprünglichen Formulierung durch Nelson und Siegel als auch in der Erweiterung durch Svensson – ausreichend flexibel, um die am Markt beobachteten Datenkonstellationen wiederzugeben. Dazu gehören monoton steigende oder fallende, U-förmige, invertiert-U-förmige und S-förmige Kurvenverläufe, die mit dem bislang verwendeten linear-logarithmischen Regressionsansatz zum Teil nicht abgebildet werden konnten. Die größere Flexibilität des Ansatzes mit Exponentialtermen gegenüber dem linear-logarithmischen Ansatz zeigt das obenstehende Schaubild am Beispiel des Januar 1994. Die in den Daten zu beobachtende ausgeprägte U-Form wird gut abgebildet, während der linear-logarithmische Ansatz eine monoton steigende Kurve generiert.

*Hinreichende  
Flexibilität ...*

... aber geld-  
politisch infor-  
mativer, glatter  
Kurvenverlauf

Anders als nichtparametrische Ansätze glättet das oben dargestellte Schätzverfahren einzelne „Zacken“ in der Kurve heraus, so daß die Schätzergebnisse relativ wenig von einzelnen Beobachtungen abhängig sind. Sie sind daher weniger geeignet, um etwa Abnormitäten in einzelnen Laufzeitensegmenten oder bei einzelnen Anleihen zu identifizieren, doch liefern sie Kurvenverläufe, die relativ unabhängig von „Ausreißern“ sind und damit für die geldpolitische Analyse leichter interpretierbar sind. Darüber hinaus ermöglicht die Spezifikation plausible Extrapolationen für die Bereiche, die über die beobachteten Laufzeiten hinausgehen. Die langfristig extrapolierten Zinssätze konvergieren gegen den Wert der Konstanten  $\beta_0$ , da der Beitrag der Exponentialterme mit zunehmender Laufzeit gegen Null geht. Dieser Grenzwert kann als der sehr langfristige Zinssatz aufgefaßt werden. Demgegenüber können nichtparametrische Schätzansätze oder solche, die mit der Laufzeit linear verbundene Terme enthalten (wie der linear-logarithmische Ansatz), bei langfristiger Extrapolation unplausible Schätzwerte liefern, wie zum Beispiel negative oder unbegrenzt hohe Zinssätze.

Tägliche  
Schätzung aus  
Kursen von  
Bundeswert-  
papieren

Die Parameter der oben dargestellten Funktion werden täglich geschätzt. Den Schätzungen liegen die Kurse von Bundesanleihen, Bundesobligationen und Bundesschatzanweisungen mit (Rest-) Laufzeiten von mindestens drei Monaten zugrunde. Diese Wertpapiere sind weitgehend homogen und gewährleisten eine ausreichende Besetzungsdichte über das im Mittelpunkt des Interesses stehende Laufzeitenspektrum bis zu zehn Jahren. Die Parameter werden mit Hilfe eines

nichtlinearen Optimierungsverfahrens ermittelt. Dabei wird als Optimierungskriterium die Minimierung der quadrierten Abweichungen der geschätzten (bzw. aus den theoretischen Kursen ermittelten) von den beobachteten (bzw. aus den beobachteten Kursen ermittelten) Renditen verwendet. Renditenirrtümer werden anstelle von Kursirrtümern minimiert, da es in erster Linie um Zins- und nicht um Kursschätzungen geht und die Minimierung von Kursirrtümern mit relativ großen Renditenabweichungen bei Anleihen mit kurzen (Rest-) Laufzeiten verbunden sein kann. Die Spezifizierung von Nebenbedingungen für einige Parameter gewährleistet, daß die geschätzten Zinssätze positiv sind (z. B. Restriktionen, wonach im Falle des Svensson Ansatzes  $\beta_0$ ,  $\tau_1$  und  $\tau_2$  größer als Null sind) und daß sich bei Testrechnungen mit historischen Daten stets plausible Kurvenverläufe ergeben.

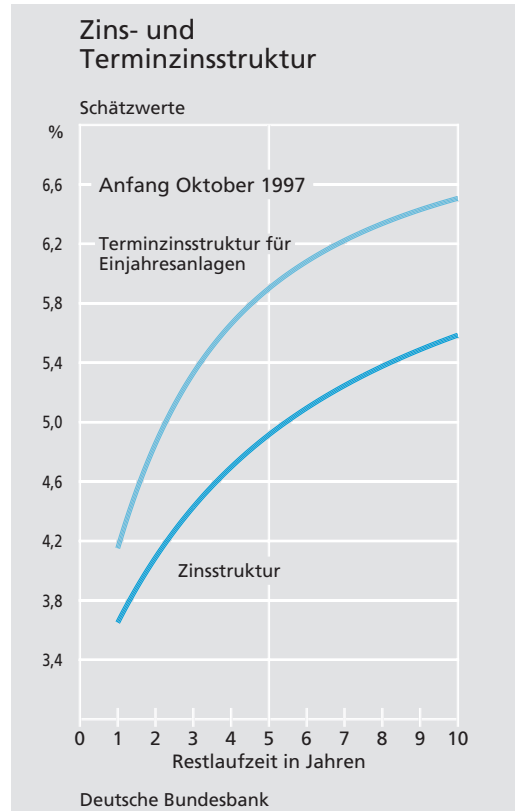
Üblicherweise wird der Zusammenhang zwischen der Laufzeit und den Zinssätzen in Form der (Kassa-) Zinsstrukturkurve dargestellt; sie zeigt – ausgehend vom gegenwärtigen Zeitpunkt – die Verzinsung von Anlagen mit unterschiedlicher Laufzeit. Aus der Kassa-zinsstruktur kann (unter der Annahme eines Arbitragegleichgewichts zwischen den Laufzeitenbereichen) aber auch die „implizite“ Verzinsung künftiger Anlagen – bei der derzeitigen Marktkonstellation – abgeleitet werden. Diese Sätze werden als implizite Terminzinsen bezeichnet, da sie nicht direkt beobachtbar sind und die Verzinsung „per Termin“ zeigen. Während beispielsweise der zehnjährige (Kassa-) Zinssatz die Ertragsrate von heute an gerechnet für zehn Jahre ausweist, gibt der einjährige Terminzinssatz in neun

Darstellungs-  
formen

Jahren die Verzinsung einer einjährigen Anlage im zehnten Jahr an. Die Verzinsung einer Abfolge künftiger Kapitalmarktanlagen zeigt die Terminzinsstruktur (wobei in der Regel einjährige Anlagen unterstellt werden). Sie liegt oberhalb (unterhalb) der Zinsstruktur, wenn letztere ansteigt (abfällt). Die nebenstehende Abbildung verdeutlicht dies.

*Zinsstruktur,  
Terminzins-  
struktur und  
Erwartungs-  
hypothese*

Der Erwartungshypothese der Zinsstruktur zufolge erbringt eine Geldanlage für einen bestimmten Zeitraum den gleichen erwarteten Ertrag, unabhängig davon, ob sukzessive kurzfristige Anlagen getätigt werden oder ob einmalig eine längerfristige Anlage vorgenommen wird. Unter dieser Voraussetzung entspricht der einjährige (implizite) Terminzinsatz dem für den gleichen Zeitpunkt erwarteten einjährigen (Kassa-) Zinssatz. In diesem Fall gibt die Steigung der Zinsstrukturkurve, gemessen als Differenz der Zinssätze für verschiedene Laufzeiten, Auskunft über die erwarteten durchschnittlichen Veränderungen der kurzfristigen Zinssätze während des entsprechenden Zeitraumes. Der Verlauf der Terminzinsstrukturkurve zeigt dagegen unmittelbar die erwartete künftige Entwicklung der (Kassa-) Zinssätze. Dies ist aus geldpolitischer Sicht interessant, da eine bessere Trennung der Erwartungen über die kurze, mittlere und lange Frist als im Fall der Zinsstrukturkurve möglich ist. Allerdings gelten



Einwände gegen eine zu strikte Interpretation der Zinsstrukturkurve im Sinne der Erwartungstheorie eher noch stärker für die Terminzinsstrukturkurve; dabei ist in erster Linie die Existenz zeitvariabler Risiko- und Terminprämien zu nennen, die implizite Terminzinsen stark beeinflussen können. Da einschlägige empirische Untersuchungen die Existenz solcher zeitvariabler Prämien im allgemeinen nicht ablehnen können, sollte die Terminzinsstruktur mit besonderer Vorsicht interpretiert werden.